

# Mathematik verstehen ohne rechnen zu müssen

Ein Aufsatz von Roger Zurbriggen aus Neuenkirch (17.6.09, überarbeitet 7.7.10)

Zuerst einmal möchte ich mich zur Mathematik als einer Sache bekennen, die sehr viel Spass machen kann. Es sei denn, man wird auf die mathematische Leistung hin geprüft und benotet, was Stress bedeuten kann. Aber, das liegt weniger an der Mathematik selber, sondern ist die Konsequenz einer schulischen Laufbahn.

Im Folgenden möchte ich die Herkunft der Mathematik und ihre heutige Rolle in der Wissenschaft betrachten, ohne dabei selbst Mathematik zu betreiben mit Ausnahme von ein paar wenigen Ausführungen zur Differentialrechnung. Es geht also vielmehr um Geschichte und erkenntnistheoretische Aspekte der Mathematik und wieso der Platonismus dabei eine wichtige Rolle spielt.

Im Kern dieses Aufsatzes geht es um die Frage nach der Ethik in den Wissenschaften. Wieso ist die Mathematik eine wertneutrale Formalwissenschaft, wohingegen die Naturwissenschaften Realwissenschaften sind, die auf einem ethischen Wertehintergrund betrieben werden? Die Antwort auf diese Frage ist nicht von Optionen abhängig, sondern ist im Wesen der Mathematik und den Naturwissenschaften begründet.

Dieser Aufsatz ist in 6 Abschnitte gegliedert:

- 1) *Abendländische Wirkungsgeschichte des Platonismus*
- 2) *Die Rolle der Mathematik in der Philosophie von Platon*
- 3) *Die Rolle der Mathematik in der Neuzeit*
- 4) *"Naturwissenschaftlicher Platonismus"*
- 5) *Mathematische Wahrheit und das Prinzip naturwissenschaftlicher Kontroversen*
- 6) *Mathematik ist eine "Wert-lose" Methode*

## 1) Abendländische Wirkungsgeschichte des Platonismus

Alfred North Whitehead bemerkte einmal, dass die gesamte europäische Philosophie nur Fussnoten zu Platon seien. D. h. Platon wurde zur Referenz der abendländischen Philosophie schlechthin und hat das europäische Denken geprägt wie kein anderer. Der Grund für diese Erfolgsgeschichte sehe ich in der Art des abstrakten Denkens, das sowohl für die klassische Theologie der Spätantike und des Mittelalters, als auch für die Naturwissenschaften seit der Neuzeit eine wichtige Voraussetzung war und ist. Mit dem Siegeszug der Naturwissenschaften in der Neuzeit wurde der westliche Mensch nachhaltig im Denken dahingehend geprägt.

## 2) Die Rolle der Mathematik in der Philosophie von Platon

Platon versuchte den heraklidischen Denkansatz (die Veränderung ist real) mit dem des Parmenides (das Unveränderliche ist real) in seiner Zweiweltenlehre zu vereinen. Aber ein Drittes, das oftmals nur beiläufig erwähnt wird, bildet meines

Erachtens den wichtigsten Einfluss auf Platons Denken - die Mathematik. Man meint vielleicht, dass die Mathematik vor allem von der damaligen Schule der Atomisten betrieben und gefördert wurde, weil man intuitiv denken mag, dass Demokrit und seine Anhänger mit dem Atom-Konzept die moderne Physik bereits Grund gelegt hätten. Carl Friedrich von Weizsäcker zeigt aber deutlich auf<sup>1</sup>, dass die Mathematik gerade nicht in der Schule der Atomisten besonders gefördert wurde, sondern in deren Gegenschule, in der Akademie Platons. So riet das Schild über der Tür von Platons Akademie allen Schülern, Geometrie zu lernen<sup>2</sup>.

Platon war von der Mathematik dermassen begeistert, dass er eine Erkenntnislehre (Zweiweltenlehre) entwarf, worin er die erstrebenswerte Idealität, wie er sie in der Mathematik vorfand, mit der sinnlichen Wahrnehmung im Alltag, die für ihn alles andere als befriedigend war, in einer Theorie vereinen konnte.

Aber was ist Mathematik?<sup>3</sup> Mathematik ist eine Formalwissenschaft, deren Befunde nur verstandesmächtig, aber nicht sinnlich überprüft werden können. Sie ist und bleibt damit ein rein geistiges Konstrukt. Dabei geht man z. B. von Annahmen aus und probiert über logische Schlüsse zu einem Resultat zu kommen, welches mit der Annahme übereinstimmt oder nicht. Je nachdem war die Annahme wahr oder falsch. Wahr oder falsch wird aber in der Mathematik rein logisch-abstrakt verstanden. Das hat nichts mit existentiellen Wahrheiten, wie z. B. mit der Liebe oder mit anderen Wahrheiten, die man in Beziehungen erfahren kann, zu tun. Das heisst, **es ist eine Illusion zu meinen, man könne mit einem mathematischen Denken das Leben verstehen**. In dieser Aussage kann ich mich auf Carl Friedrich von Weizsäcker berufen, der die Tragweite der Wissenschaft in genau diesem Punkt beschränkt sah. Die Mathematik kann sehr erfolgreich als Methode in einem wissenschaftlichen Kausaldenken dienen. Platon verwendete aber die Mathematik nicht nur als Methode zwecks wissenschaftlicher Erkenntnis, sondern hob sie auf den Sockel, des zu erstrebenden Ideals. So wie die Zahlen/Formen in der Mathematik/Geometrie, sind die Ideen in der Ideenwelt immer und ewig, unveränderliches Sein. Platon begründet mit der Zweiweltenlehre eine Erkenntnislehre, worin die wahre Existenz der Dinge in der sinnlich nicht erkennbaren Ideenwelt beheimatet wird. Damit wird der Modus eines formalistisch-mathematischen Modells einfach so zur wahren Wirklichkeit deklariert. Umgekehrt wird das, was wir sinnlich zu erkennen vermögen als trügerische Schatten erklärt.

Das kann zwar gedacht werden und ist philosophisch legitim, aber es entbehrt jeder empirischen Erfahrung. In diesem Sinn empfinde ich Platons Zweiweltenlehre bestenfalls als Theorie, welche aber unbedingt einer Kritik aus dem Leben bedarf. Vor allem was den Dualismus im Platonismus betrifft, so hat dessen prägende Auswirkung auf die westliche Kultur viele Probleme verursacht. So sieht z. B. auch die Theologin Ina Praetorius das zweigeteilte Denken und Handeln als massgebliche Ursache für die Misere in unserer Gesellschaft und der Umwelt.

---

<sup>1</sup> S. 56 in von Weizsäcker (1990)

<sup>2</sup> S. 78 in Solomon und Higgins (2000)

<sup>3</sup> Die Mathematik (griech.: *mathēmatikē [téchnē]*, „die Kunst des Lernens“) ist die Wissenschaft, welche aus der Untersuchung von Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstand. Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft, die selbst geschaffene abstrakte Strukturen auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht, beschrieben. (Aus: Wikipedia; de.wikipedia.org; dato 27.11.06)

### 3) Die Rolle der Mathematik in der Neuzeit

Die Mathematik erwies sich als abstrakte Denkform mit einem vielseitigen und praktischen Nutzen in vielen Lebensbereichen, wo man auf das Zählen und Berechnen angewiesen war. So war der Siegeszug der Naturwissenschaften in der Neuzeit massgeblich von der Mathematik mitbewirkt worden, insbesondere von der von Isaac Newton (englischer Physiker und Mathematiker, 1643-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (deutscher Philosoph und Mathematiker, 1646-1716) ende des 17. Jh. fast gleichzeitig entwickelten Differentialgleichung. Während Newton das Problem physikalisch über das Momentangeschwindigkeitsproblem anging, versuchte es Leibniz geometrisch über das Tangentenproblem.<sup>4</sup>

Differentialgleichungen geben die zeitliche Veränderung einer Messgrösse als Produkt der Ursache und ihrer Dauer an. Die Zeit verbindet Ursache und Wirkung, respektive ohne fortschreitende Zeit ist keine Kausalität denkbar.<sup>5</sup>

Ein anschauliches Beispiel für eine Differentialgleichung ist die Geschwindigkeit als Verhältnis (Quotient) von Wegstrecke ( $x_2 - x_1 = dx$ ) zu Zeitspanne ( $t_2 - t_1 = dt$ ):

$$v = dx / dt; \quad \text{mathematisch schreibt sich dies als: } \dot{x}(t) = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Die Beschleunigung wäre dann das Verhältnis (Quotient) von Geschwindigkeitszunahme ( $v_2 - v_1 = dv$ ) zu Zeitspanne ( $t_2 - t_1 = dt$ ):

$$a = dv / dt; \quad \text{mathematisch schreibt sich dies als: } \ddot{x}(t) = a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$$

Diese gewöhnungsbedürftige Schreibweise verursacht mancherlei Frustration bei Schülern. So kann man auch den Spruch eines Studenten verstehen, den er an seinem Arbeitsplatz der Uni Bern an der Wand stehen hatte: "*Lieber TV als dV.*"

Die auf der Differentialrechnung begründete newtonsche Physik wurde zur klassischen Physik schlechthin. Es wurde die Physik der Ingenieure. Damit lässt sich alles berechnen und Maschinen bauen. Das verlieh dem Menschen Macht über die Welt. Denn wenn er sie berechnen kann, dann kann er sie auch kontrollieren.

Der Glaube an die Omnipotenz (absolute Machbarkeit) der Naturwissenschaft gründet vor allem in der universellen Anwendbarkeit der Differentialgleichung, im Speziellen im Zusammenhang mit dem Gravitationsgesetz und der damit möglich gewordenen Berechnung der Planetenbewegungen.

### 4) "Naturwissenschaftlicher Platonismus"

Die ewigen und reinen Naturgesetze konnte man nun mathematisch genau beschreiben. Damit eröffnete die Mathematik einen Zugang zum Verständnis der Welt.

---

<sup>4</sup> Die Differential- bzw. Differenzialrechnung ist ein Gebiet der Mathematik und ein wesentlicher Bestandteil der Analysis. Sie ist eng verwandt mit der Integralrechnung, mit der sie unter der Bezeichnung Infinitesimalrechnung zusammengefasst wird. Zentrales Thema der Differentialrechnung ist die Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen. Hierzu dient die Ableitung (auch Differentialquotient genannt), deren geometrische Entsprechung die Tangentensteigung ist. (Aus: Wikipedia; de.wikipedia.org; dato 15.6.09)

<sup>5</sup> S. 39 in Benz, 2001

Ähnlich wie damals Platon das Ideal der reinen Idee zur eigentlichen Realität erklärte, wird das Ideal der exakten Berechenbarkeit zur eigentlichen Wirklichkeit erklärt. Mathematik wird dann nicht mehr als eine abstrakte Formalisierung, sondern als exakte, und damit unausgesprochen, als wahre Darstellung der Realität interpretiert. Somit wird Mathematik in die Nähe der Wahrheit gerückt. Eine auf diese Weise verklärte Mathematik sehe ich als Bestandteil einer neoplatonischen Sicht der Naturwissenschaften. Darin ist nicht mehr die Mathematik das abstrakte Abbild der Realität, sondern umgekehrt, das mathematisch exakt beschreibbare Naturgesetz wird zur Realität und die Natur zu dessen ungenauem Abbild erklärt.

Hier könnte ein radikaler Skeptizismus eines David Hume sehr heilsam sein. Denn Naturgesetze existieren als solche gar nicht. Naturgesetze sind geistige Produkte des menschlichen Verstandes, der versucht Naturbeobachtungen in einen Kausalzusammenhang zu stellen. In diesem Sinn sind Naturgesetze metaphysische Konstrukte als Resultat einer bestimmten Denkweise.

Das Erklärt auch, wieso die Mathematik ihre Wurzeln in der Philosophie hat, wo die Logik begründet und entwickelt wurde. Grosse Mathematiker und Naturwissenschaftler waren sich dessen immer bewusst geblieben, so z. B. Carl Friedrich von Weizsäcker.

Die Mathematik ist die abstrakteste Form eines rein logischen Denkens. Sie abstrahiert von jeglicher Sinneswahrnehmung, ist also reine Metaphysik. Die Mathematik ersetzt Objekte, Inhalte und Werte durch wertneutrale Zahlen und es bleibt ein reiner Formalismus eines streng logischen Denkens zurück.

**Diese Abstraktion, weg von der Realität und ihren realen Werten hin zu reinen Zahlen macht die Mathematik erstens wertneutral und zweitens sehr breit anwendbar. Aber gerade in der Anwendung geschieht wieder das Umgekehrte, was zuvor in der Abstraktion geschah. Dem anzuwendenden mathematischen Formalismus werden Werte aus dem entsprechenden Anwendungsgebiet zugeordnet. D. h., genau im Moment der Anwendung bekommt der sonst wertneutral mathematische Formalismus eine verbindliche Komponente hinsichtlich der betroffenen Werte zugeordnet. Das ist auch der Moment, in welchem der Anwender (z. B. ein Naturwissenschaftler) diese Verbindlichkeit eingeht und deswegen gegenüber diesen Werten verantwortlich wird. D. h. Ethik ist ein integraler Bestandteil aller Naturwissenschaften, respektive aller Realwissenschaften<sup>6</sup>.**

Der hohe Grad der Abstraktion in der Mathematik ermöglicht deren fast universelle Anwendung in den Naturwissenschaften und erweckt deswegen bei vielen Naturwissenschaftlern den Eindruck, dass nicht nur die Mathematik rein formal, d. h. wertneutral sei, sondern auch die Naturwissenschaften selber wertneutral seien. Ethische Aspekte können dadurch gar nicht erst thematisiert werden.

**Der philosophisch nicht gebildete Naturwissenschaftler merkt dabei offenbar nicht, dass hier Methode mit Ideologie fast unmerklich aber radikal vertauscht wurden.** Wie anders lassen sich die Lobeshymnen auf die Naturwissenschaften erklären, zumal sie auch an vorderster Front gegen die Religion in den Kampf geschickt wurden. Aber Wahrheit in der Mathematik meint eben nur "in sich logisch", d. h. widerspruchsfrei, unabhängig davon wie realistisch die Grundannahmen waren. Am verheerendsten war nun aber, dass sich das mathematische Wahrheitsverständnis immer mehr als Norm durchgesetzt hat. Damit ging auch der

---

<sup>6</sup> Realwissenschaften, sind Einzelwissenschaften der Natur- und Kulturwissenschaften. Die Mathematik ist auch eine Einzelwissenschaft, aber eben keine Real-, sondern eine Formalwissenschaft. Im Gegensatz zu den Einzelwissenschaften gibt es die Universalwissenschaften, die sich mit allen Formen des Seins auseinandersetzen. Siehe dazu die Figur am Ende des Aufsatzes.

Zugang zu den alten Schriften verloren, was man dann als Bestätigung empfand, dass die Religion sowieso nur unverständliches Zeugnis behandle. Zum Glück hat die Physik des 20. Jahrhunderts einiges wieder ins rechte Licht gerückt, und gezeigt, dass die Realität oftmals nur kontrovers beschrieben werden kann.

### 5) Mathematische Wahrheit und das Prinzip naturwissenschaftlicher Kontroversen

Diese Thematik möchte ich anhand eines Zitates aus meinem Physiklehrbuch darstellen, das ich als Gymnasiast genießen durfte.

Das entsprechende Kapitel behandelt die Frage, ob Interferenzerscheinungen wirklich den Beweis für den Wellencharakter des Lichtes liefern, denn, so die Autoren, in der Physik liegt eine völlig andere Situation vor als in der Mathematik.

*"Wir haben vielmehr bewiesen, dass aus der Annahme der Wellennatur des Lichtes Interferenzerscheinungen hergeleitet werden können. Wenn unsere Annahme richtig ist, so zeigt der Beweis, dass auch die Folgerung richtig sein muss. Falls aber die Folgerung stimmt, so haben wir noch keinesfalls bewiesen, dass auch die Annahme korrekt war. Diese Schwierigkeit ist der Physik eigentümlich. Aus den Experimenten können wir niemals eindeutig auf die Grundbegriffe schliessen, die wir zur Erklärung physikalischer Phänomene verwenden. Daher kann es zu Überraschungen und zu neuen Theorien kommen."*<sup>7</sup>

Diese Einsicht, dass die indirekte Beweisführung in der Physik keine Aussage über den Wahrheitsgehalt der Grundannahme erlaubt, zeigt, dass der mathematische Wahrheitsbegriff nicht auf die Realität angewandt werden kann. Denn in der Mathematik wird mit wahr und falsch die Richtigkeit eines Formalismus, respektive des logischen Denkens beurteilt. Es gibt ja in der Mathematik keine real existierenden Werte, die man auf deren Wahrheitsgehalt prüfen könnte. In den Realwissenschaften braucht es aber einen weiterreichenden Wahrheitsbegriff, der es erlaubt über deren Werte Wahrheitsaussagen zu machen. Denn das ist der Inbegriff einer Realwissenschaft, ihre Werte zu erkennen und zu verstehen versuchen, d. h. sich deren Wahrheitsgehalt zu nähern.

### 6) Mathematik ist eine "Wert-lose" Methode

Mathematik ist lediglich eine Art des Denkens. Sie besticht durch ihre Klarheit und absolute Logik. Man darf sie aber deswegen nicht verklären, weil sie ein reiner Formalismus ist. Sobald die Mathematik auf die Realität angewandt wird, so ersetzt man die wertneutralen Zahlen durch real existierende Werte, denen gegenüber der Mensch eine Verantwortung hat. D. h., mit der Anwendung mathematischer Formeln wechselt man von der Mathematik als Formalwissenschaft in eine Realwissenschaft. Deswegen sind die Wissenschaften nie wertneutral, mit eben der Ausnahme der Mathematik und noch einigen anderen Formalwissenschaften. Diese grundlegende Unterscheidung zwischen der Mathematik und den Natur- und Kulturwissenschaften, zeigt sich auch in der Nomenklatur der Wissenschaften, wo die Mathematik als

---

<sup>7</sup> S. 35, Sexl et al. (1980)

Formalwissenschaft und die Natur- und Kulturwissenschaften eben als Realwissenschaften bezeichnet werden. Zusammen bilden sie die Einzelwissenschaften. Demgegenüber sind die philosophischen und theologischen Wissenschaften Universalwissenschaften.

Die Grundlage dieser Unterscheidungen liegt im Gegenstand, sprich den Werten der jeweiligen Wissenschaft. Die Mathematik kennt nur wertneutrale Zahlen aber eben keine realen Gegenstände, hingegen haben die Realwissenschaften real existierende Werte (Objekte) als Gegenstand ihrer Untersuchungen.

Grundtypen		Wissenschaften			Gegenstände, Werte		
Universalwissenschaften	<b>Theologie</b> <b>Philosophie</b> (3 Kerngebiete: Logik, Ethik, Metaphysik)				gesamte Wirklichkeit	Sein	
	Formalw.	Mathematik, Logik, Strukturw. (theor. Inform.)			wertneutrale Zahlen		
Einzelwissenschaften	Realwissenschaften	Naturw.	Physik (Astron.)	Materialw. Ingenieurw. (Technik)	leblose	Materie, Energie (Natur)	
			Chemie				
			Geologie				
			Biologie				
		Kulturw.	Geistesw.	Geschichtsw.	<b>Medizin</b>	lebendige	Kultur, Geist
				Religionsw.		Geschichte	
				Sprachw.		Religion	
				Kunstw.		Sprache	
			Sozialw. und Wirtschaftsw.	Ethnologie		Völker	
				Demographie		Bevölkerung	
				Pädagogik		Erziehung	
				Soziologie		Gesellschaft	
				Politologie		Politik	
	<b>Rechtsw.</b>	Recht					
	Ökonomie	Wirtschaft					

(Grundschemata gemäss Anzenbacher, 1992)

## Literatur

- **Anzenbacher** A. (1992): Einführung in die Philosophie. Herder, Wien.
- **Benz** A. (2001): Die Zukunft des Universums. Zufall, Chaos, Gott? 4. Auflage, Patmos Verlag, Düsseldorf.
- **Praetorius**, Ina (2005): Handeln aus der Fülle. Postpatriarchale Ethik in biblischer Tradition. Gütersloher Verlagshaus.
- **Sexl** R., **Raab** I. & **Streeruwitz** E. (1980): Materie in Raum und Zeit: Eine Einführung in die Physik. Band 3. Verlag Diesterweg-Salle und Verlag Sauerländer.
- **Solomon** R. C. & **Higgins** K. M. (2000): Eine kurze Geschichte der Philosophie. Piper Verlag GmbH.
- **von Weizsäcker** C. F. (1990): Die Tragweite der Wissenschaft. 6. Auflage, S. Hirzel Verlag